

6. Αναδρομή

6.1 Παραγοντικό

Ίσως το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα για τη χρήση αναδρομής να σχετίζεται με τον υπολογισμό του παραγοντικού ενός αριθμού. Από τον ορισμό του, το παραγοντικό ενός ακέραιου αριθμού n (με $n > 0$) ισούται με το γινόμενο όλων των ακεραίων από 1 έως και n και δίνεται από τη σχέση:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$$

και φυσικά ισχύει πως $1! = 1$.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως ισχύει ότι:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) = (n-1)!$$

οπότε στην γενική περίπτωση η παραπάνω έκφραση για τον υπολογισμό του $n!$ μπορεί να γραφεί:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Συνεπώς το $n!$ μπορεί να υπολογισθεί με αναδρομική κλήση. Σε όρους της Prolog, μπορούμε να ορίσουμε τον κανόνα factorial(N,M) όπου το πρώτο όρισμα N είναι ο αριθμός του οποίου το παραγοντικό θέλουμε να υπολογίσουμε και M είναι το εξαγόμενο των υπολογισμών, δηλαδή είναι $N! = M$. Τα παραπάνω εκφράζονται ως εξής:

factorial(1,1).

factorial(N,M):- N > 1,

X is (N-1),

factorial(X,Y),

M is (N*Y).

όπου βέβαια ορίστηκε πως το $1!$ ισούται με την μονάδα, με το γεγονός $\text{factorial}(1,1)$, ενώ η γενική περίπτωση ($N > 1$) επιλύεται με αναδρομική κλήση της σχέσης factorial με όρισμα X που ισούται με το N μειωμένο κατά 1. Φυσικά το τελικό εξαγόμενο, δηλαδή το M ισούται με το γινόμενο του αποτελέσματος της αναδρομικής κλήσης (που είναι το Y) επί το N .

6.2 Ύψωση σε Δύναμη

Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι η χρήση αναδρομής για τον υπολογισμό της ύψωσης ενός αριθμού m σε κάποια θετική ακέραια δύναμη n . Σε αυτή την περίπτωση ο ένας τρόπος είναι να γίνει επαναληπτικά πολλαπλασιασμός του m με τον εαυτό του επί $(n-1)$ φορές. Μπορούμε όμως να γράψουμε ότι:

$$m^n = m \cdot m^{n-1}$$

οπότε είναι φανερή η δυνατότητα λύση του προβλήματος με αναδρομή. Ορίζοντας τη σχέση $\text{power}(M, N, P)$ όπου M είναι η βάση, N ο εκθέτης και P το εξαγόμενο της ύψωσης του M στην N -οστή δύναμη, μπορούμε να γράψουμε:

$\text{power}(M,0,1)$.

$\text{power}(M,1,M)$.

$\text{power}(M,N,P)$:- $N > 0$,

X is $(N - 1)$,

$\text{power}(M,X,Y)$,

P is $(Y * M)$.

Όπου ελήφθη υπόψη ότι $M^0 = 1$, $M^1 = M$, ενώ στη γενική περίπτωση που είναι $N > 0$ γίνεται υπολογισμός της ύψωσης σε δύναμη με χρήση αναδρομής.

Αν θελήσουμε στα παραπάνω να συμπεριλάβουμε και την περίπτωση που ο εκθέτης N είναι αρνητικός, τότε θα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι $M^N = 1/M^{N-1}$, οπότε μπορούμε να επαναλάβουμε τους υπολογισμούς με την απόλυτη τιμή του N

που είναι η $abs(N)$ και στη συνέχεια να αντιστρέψουμε το εξαγόμενο. Έτσι στα προηγούμενα πρέπει να προστεθεί το εξής:

```
power(M,N,P):- N < 0,
               abs(N,X),
               power(M,X,Y),
               P is (1/Y).
```

Όπου η έκφραση $abs(N,X)$ επιστρέφει την απόλυτη τιμή του N στη μεταβλητή X .

6.3 Αριθμοί Fibonacci

Η ακολουθία των αριθμών Fibonacci ξεκινά να υπολογίζεται αρκεί να είναι γνωστοί δύο αριθμοί οι οποίοι είναι οι αριθμοί εκκίνησης. Στη συνέχεια κάθε νέος όρος της ακολουθίας υπολογίζεται από το άθροισμα των τιμών των αμέσως δυο προηγούμενων όρων. Είναι σαφές ότι αν είναι F_n ο n -οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci τότε γενικά μπορούμε να γράψουμε:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Η παραπάνω έκφραση φυσικά περιέχει το στοιχείο της αναδρομής. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τη σχέση Fibonacci με δυο ορίσματα N και M , όπου N είναι η τάξη του όρου της ακολουθίας Fibonacci που θέλουμε να υπολογίσουμε και M είναι η τιμή που θα λάβει ο όρος αυτός. Είναι:

```
fibonacci(1,1).
fibonacci(2,1).
fibonacci(N,M) :- A is ( N - 2 ),
                  B is ( N - 1 ),
                  fibonacci(A,X),
                  fibonacci(B,Y),
                  M is ( X + Y ).
```

Στα παραπάνω ελήφθη υπόψη ότι οι δυο πρώτοι όροι της ακολουθίας ($N=1,2$) είναι ίση με τη μονάδα. Για τη γενική περίπτωση γίνεται αναδρομική κλήση της σχέσης για $A = N - 1$ και $B = N - 2$, δηλαδή υπολογίζονται οι δυο αμέσως προηγούμενοι όροι του N . Τα αποτελέσματα των υπολογισμών αυτών εξάγονται στις μεταβλητές X και Y . Αυτό συνεχίζεται μέχρι να εξαντληθεί ο αναδρομικός χαρακτήρας των κλήσεων της σχέσης για να μπορέσει τελικά να υπολογισθεί το τελικό εξαγόμενο M σαν το άθροισμα των αναδρομικών αποτελεσμάτων X και Y .